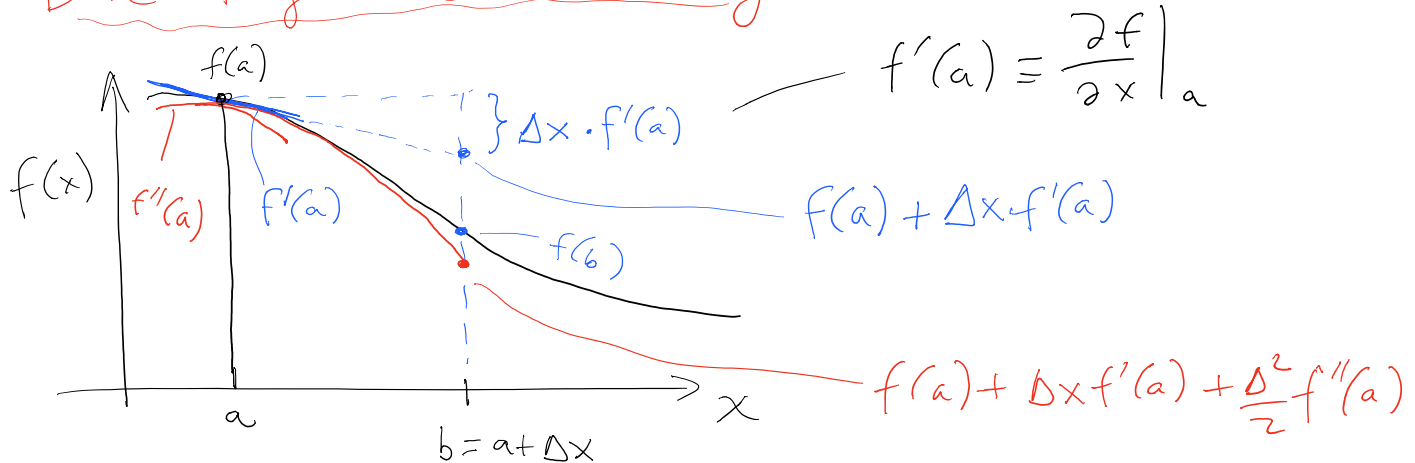


Die Taylor Entwicklung



$$f(b) \approx f(a) + \Delta x \cdot f'(a)$$

Geht es noch besser? Ja

$$f(b) \equiv f(a + \Delta x) \equiv f(a) + \Delta x f'(a) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(a) + \frac{1}{6} \Delta x^3 f^{(3)}(a) + \dots + \frac{1}{n!} \Delta x^n f^{(n)}(a) + \underbrace{O(\Delta x^{n+1})}_{n!}$$

$$+ \left[\frac{\Delta x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a + t \Delta x) dt \right]$$

Ignorieren wir mal alle Terme von Ordnung 2 und höher.

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + \Delta x f'(a)$$

Nehmen wir an das unsere Funktion eine Nullstelle bei Punkt x hat

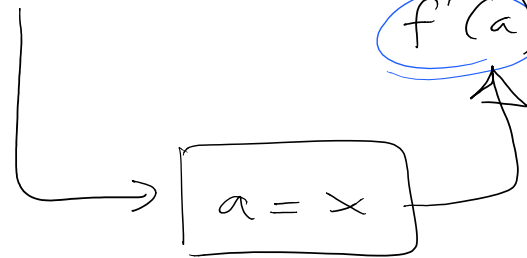
$$f(x) = 0 \quad \text{a} + \Delta x \equiv x$$

$$0 \cong f(a) + \Delta x f'(a)$$

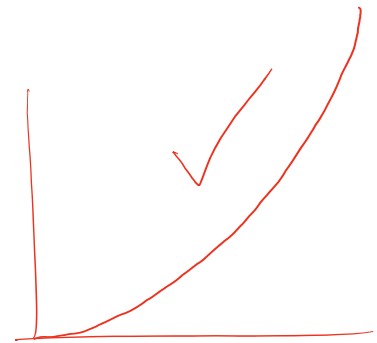
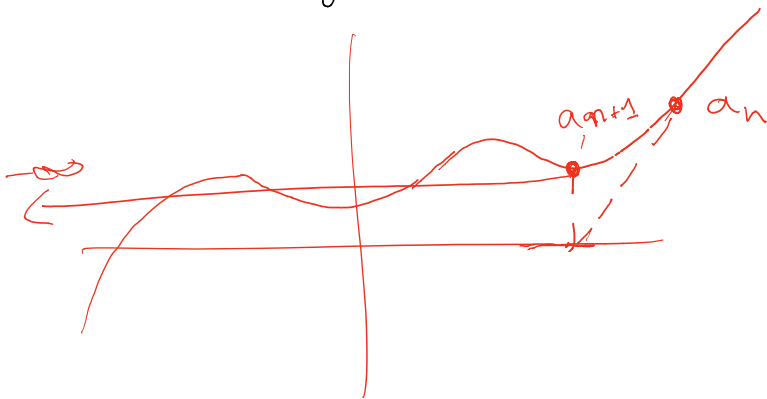
$$\Delta x \cong - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x \cong a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

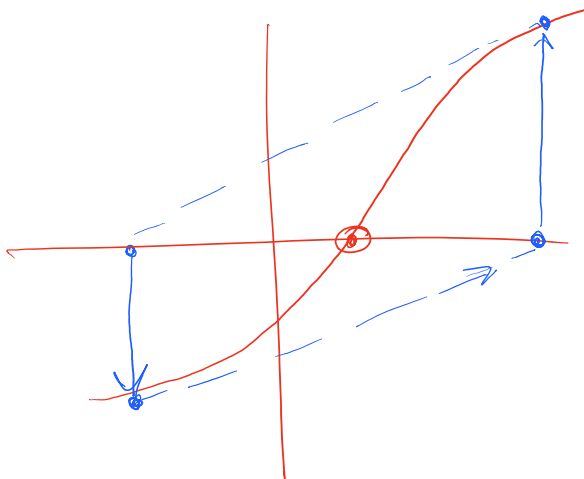
Newton
Verfahren



Jede Iteration verdoppelt die Anzahl der genauen Stellen.



Manchmal
kann Konvergenz
sichergestellt
werden!



Zyklische
Verhalten

Beispiele

a) schnelle Wurzelberechnung
(1)

Beispiele a) schwere Wurterziehung

$$\sqrt{x} ? \quad \sqrt{x} = x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$\text{Rechnen wir } \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Hier ist aber x ein gegebener Wert und wir wollen die Lösung für $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$f(y) = y - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \quad \text{Löse für } y$$

Nein! Trick $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $y^2 = \frac{1}{x}$

$$f(y) = x - \frac{1}{y^2}$$

$$y \leftarrow y - \frac{x - \frac{1}{y^2}}{2 \frac{1}{y^3}}$$

$$y \leftarrow y - \frac{1}{2} x y^3 + \frac{1}{2} y$$

$$y \leftarrow y \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} x y^2 \right)$$

hat keine \div Operation nötig!

Schnell

$$\frac{x}{u} \rightarrow x \cdot \frac{1}{u} \rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{u} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right)$$

$$\frac{x}{y} \rightarrow x \cdot \frac{1}{y} \rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

Anfangswert der so nahe wie möglich zu $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist aber es muss billig sein.

$$x = +M \times 2^e$$

$$1 \leq M < 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \times 2^{\oplus e/2}$$

$$e = 2$$

$$\boxed{\text{000} | 1 | 0}$$

→ Rechts Shift

$$\boxed{. \quad \dots 000 | 1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1$$

0.7

Mittelwert für y

$$y_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0.85355?$$

KEPLER GLEICHUNG

$$M = \textcircled{E} - e \sin \textcircled{E}$$

↑ bekannt ↑ Eccentricität

$$f(E) = E - e \sin E - M$$

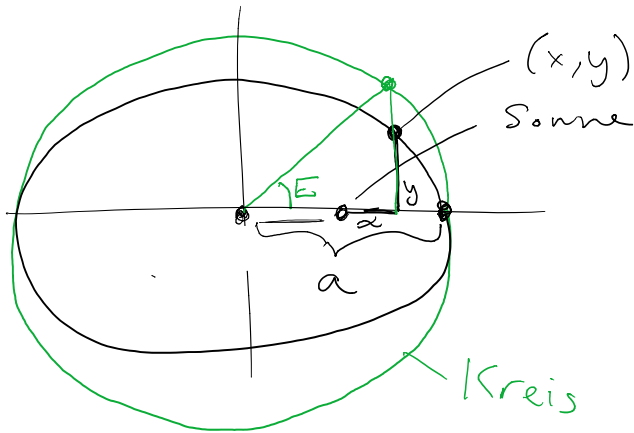
$$f'(E) = 1 - e \cos E$$

E und M sind Winkel $E_0 = M$

$$M = nt \quad n = \frac{2\pi}{T} \sim \text{Periode} \quad T = a^{3/2}$$

↑
Jahren

AU



$$x = a(\cos E - e)$$

$$y = \underbrace{a\sqrt{1-e^2}}_{\text{Kleine Halbachse } b} \sin E$$

$$\Delta t = \frac{1}{100}$$