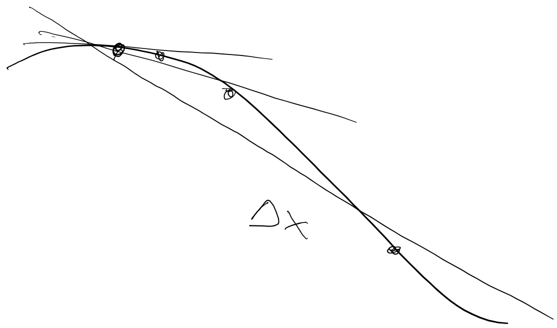
Spin 1 - Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Monday, March 7, 2016 2:26 PM

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x)$$ ← keine GDG (ODE)

kann neu geschrieben werden,

$$\frac{dy}{dx} = z(x)$$

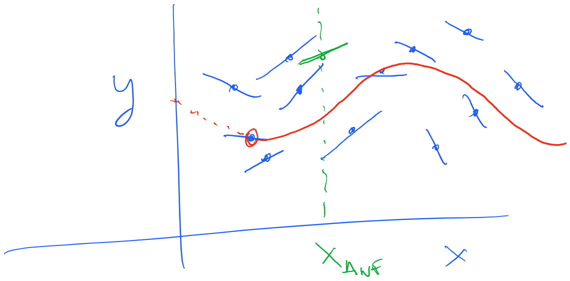
$$\frac{dz}{dx} = r(x) - q(x) \cdot z(x)$$

hier ist $z(x)$ eine neue Variable die hier ganz einfach die erste Ableitung ist.

Im Allgemeinen wollen wir eine Lösung für N Funktionen $y_i(x)$

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$$

$$i = 0 .. N-1$$



Anfangs- oder Randbedingungen (Dirichlet)

$$y_i(x_{ANF}) = \boxed{y_i^A} \text{ — gegeben}$$

$$\frac{dy_i}{dx}(x_{ANF}) = \text{Neigung}$$

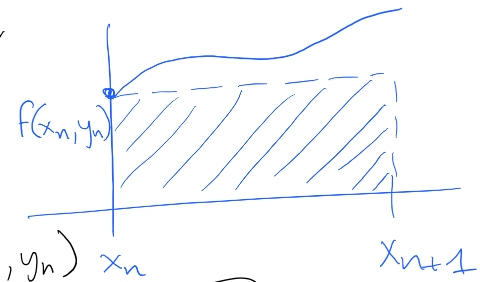
dx ` von Neumann

$$\frac{dy}{dx} = \underline{f}(x, \underline{y})$$

Wir wollen $y(x)$ mit einer gewissen Genauigkeit.

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\, dx$$

!



$$y_{n+1} - y_n = (x_{n+1} - x_n) \cdot f(x_n, y_n)$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)}$$

Vörwärts-Euler Methode

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to y_3 \; \cdots$$

$$y(x) \approx y_0, y_1 \cdots$$
$$x_0 \quad x_0 + h \cdots$$

Fehler: Abschneidefehler

Rundungsfehler

$O(\delta_M)$

Einen Schritt: Lokale Fehler

über eine ganzen fixer Abschnitt von X erhibt der Globale-Fehler.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + h\,(y_{n+1} - y_n) \cdot f'(x_n, y_n) + \cdots$$

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$$

$$+ \underbrace{h^2 f(x_n,y_n) f'(x_n,y_n)} + \dots O(h^3)$$

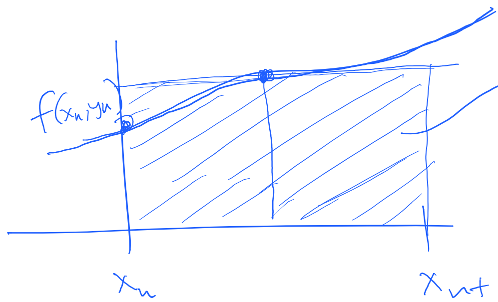
Fehler $O(h^2)$ pro Schritt

Anzahl Schritte über fixen X

$$N_{Schritt} = \frac{X}{h}$$

Globalen-Fehlen $\Rightarrow O(h)$

Geht es besser?



$$I = h \cdot f\Big(x_n + \frac{h}{2}, \underbrace{y\big(x_n + \tfrac{h}{2}\big)}_{\text{unbekannt!}}\Big)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} \cong y_n + \frac{h}{2} f(x_n,y_n)$$

Dann,

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n,y_n)\Big)}$$

Lokalen Fehlen $O(h^3)$

Midpoint Runge-Kutta

4ten Ordnung Klassische Runge-Kutta

$$\underline{k}_1 = h \underline{f}(x_n, y_n)$$

$$\underline{k}_2 = h \underline{f}\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\underline{k}_1}{2}\Big)$$

$$\underline{k}_3 = h \underline{f}\Big(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\underline{k}_2}{2}\Big)$$

$$\underline{k}_4 = h \underline{f}(x_n + h, y_n + \underline{k}_3)$$

$$\underline{y}_{n+1} = y_n + \frac{\underline{k}_1}{6} + \frac{\underline{k}_2}{3} + \frac{\underline{k}_3}{3} + \frac{\underline{k}_4}{6} + O(h^5)$$

Explicit

Explicit

Implizites Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(\tfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Räuber-Beute Verhalten

Lotka-Volterra Modell (1920)

Eichhörnchen – Adler

e a

Ohne Adler wächst die Bevölkerung der Eichhörnchen unbegrenzt.

$$\frac{\Delta e}{e} = k_e \cdot \Delta t$$

Geburtsrate (konstant)

Aber wenn Adler vorhanden sind dann reduziert sich die Eichhörnchenbevölkerung proportional zur Anzahl der Adler.

$$\frac{\Delta e}{e} = k_e \cdot \Delta t - k_{ea}\, a \cdot \Delta t$$

oder

$$\Delta e = (k_e \cdot e - k_{ea}\, \underbrace{e a}_{\text{Begegnungen}})\, \Delta t$$

K_{ea} sagt wie gut die Adler beim Jagen sind und auch wie gut die Eichhörnchen beim überleben sind.

$$\frac{\Delta a}{a} = -k_a\, \Delta t$$

Sterben mit dieser Rate.

$$\Delta a \quad k \quad a\, \Delta t - k_a\, \Delta t$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \underbrace{k_{ae}\, e\, \Delta t}_{} - k_a \ldots$$

Desto mehr Begegnungen desto grössen ist das Wachsen der Adlerbevölkerung

$$\Delta a = (k_{ae}\, ae - k_a \cdot a)\,\Delta t$$

$$\frac{de}{dt} = k_e e - k_{ea}\, ea$$

$$\frac{da}{dt} = k_{ae}\, ae - k_a a$$

$k_e = 2$

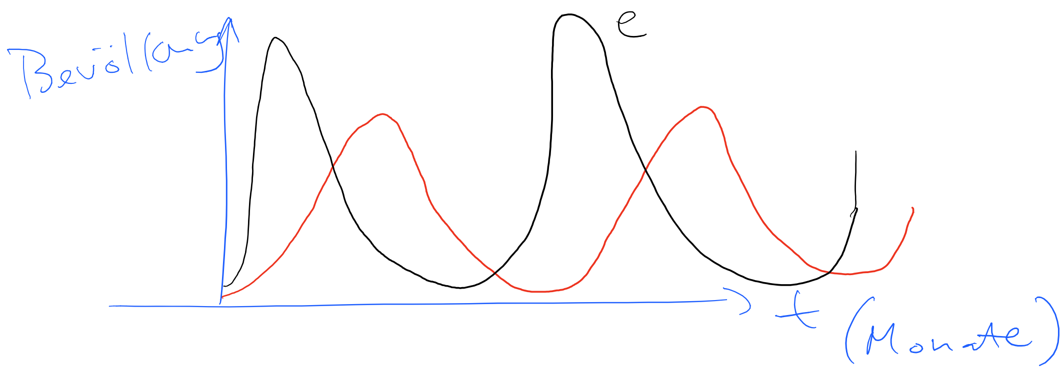
$k_{ea} = 0.02$

$k_{ae} = 0.01$

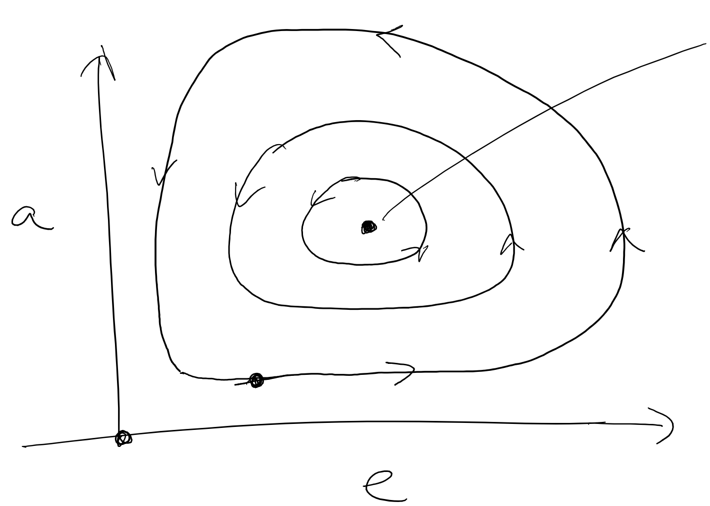
$k_a = 1.06$

$e(0) = 100$

$a(0) = 15$



Periodische



Fix Punkt

$$\frac{de}{dt} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{da}{dt} \stackrel{!}{=} 0$$