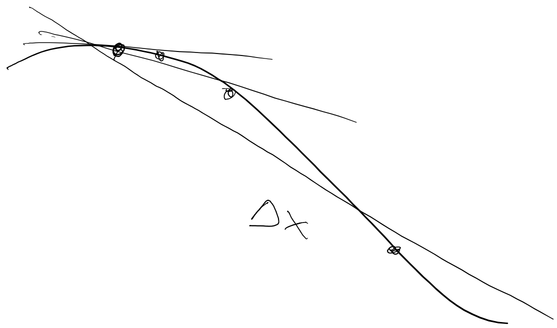
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$



$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x) \leftarrow \text{keine GDG (ODE)}$$

kann neu geschrieben werden,

$$\frac{dy}{dx} = z(x)$$

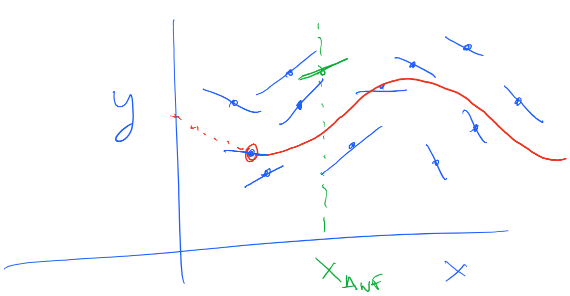
$$\frac{dz}{dx} = r(x) - q(x) \cdot z(x)$$

hier ist $z(x)$ eine neue Variable die hier ganz einfach die erste Ableitung ist.

Im Algemeinen wollen wir eine Lösung für N Funktionen $y_i(x)$

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})$$

$$i = 0 .. N-1$$



Anfangs- oder Randbedingungen (Dirchlet)

$$y_i(x_{ANF}) = \boxed{y_i^A} - \text{gegeben}$$

$$\frac{dy_i}{dx}(x_{ANF}) = \text{Neigung}$$

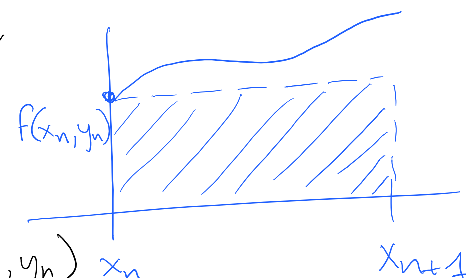
von Neumann:

$$\frac{dy}{dx} = \underline{f}(x, y)$$

Wir wollen $y(x)$ mit einer gewissen Genauigkeit.

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} dy(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\, dx$$

!



$$y_{n+1} - y_n = (x_{n+1} - x_n) \cdot f(x_n, y_n)$$

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{h}$$

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)}$$

Vörwärts-Euler Methode

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to y_3 \; \ldots$$

$$y(x) \approx y_0, y_1 \ldots$$

$$x_0 \quad x_0 + h \; \ldots$$

Fehler: Abschneidefehler

Einen Schritt: Lokale Fehler

Über eine ganzen fixen Abschnitt von X erhält den Globale-Fehler.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + h(y_{n+1} - y_n) \cdot f'(x_n, y_n) + \ldots$$

$$y_{n+1} - y_n = hf(x_n, y_n)$$

$$+ h^2 f(x_n, y_n) f'(x_n, y_n) + \ldots \mathcal{O}(h^3)$$

$$+\underbrace{h^2 f(x_n,y_n) f'(x_n,y_n)} + \dots O(h^3)$$

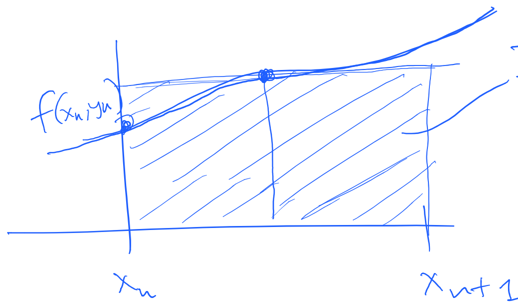
Fehler $O(h^2)$ pro Schritt

Anzahl Schritte über fixen X

$$N_{Schritt} = \frac{X}{h}$$

Globallefehler $\Rightarrow O(h)$

Geht es besser?



$$I = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, \underbrace{y\left(x_n + \frac{h}{2}\right)}_{\text{unbekannt!}}\right)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} \simeq y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$$

Dann,

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)\right)}$$

Lokaller Fehler $O(h^3)$

Midpoint Runge-Kutta

4ten Ordnung Klassische Runge-Kutta

$$\underline{k}_1 = h\, \underline{f}(x_n, y_n)$$

$$\underline{k}_2 = h\, \underline{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\underline{k}_1}{2}\right)$$

$$\underline{k}_3 = h\, \underline{f}\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\underline{k}_2}{2}\right)$$

$$\underline{k}_4 = h\, \underline{f}\left(x_n + h, y_n + \underline{k}_3\right)$$

$$\underline{y}_{n+1} = y_n + \frac{\underline{k}_1}{6} + \frac{\underline{k}_2}{3} + \frac{\underline{k}_3}{3} + \frac{\underline{k}_4}{6} + O(h^5)$$

Explicit

Explicit

Implicites Verfahren

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\left(\tfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \tfrac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

Räuber – Beute Verhalten

Lotka – Volterra Modell (1920)

Eichhörnchen – Adler

e a

Ohne Adler wächst die Bevölkerung der Eichhörnchen unbegrenzt.

$$\frac{\Delta e}{e} = k_e \cdot \Delta t$$

Geburtsrate (konstant)

Aber wenn Adler vorhanden sind dann reduziert sich die Eichhörnchenbevölkerung proportional zur Anzahl der Adler.

$$\frac{\Delta e}{e} = k_e \cdot \Delta t - k_{ea} \cdot a \cdot \Delta t$$

oder

$$\Delta e = (k_e \cdot e - k_{ea}\, \underbrace{e\,a}_{}) \,\Delta t$$

Begegnungen

k_{ea} sagt wie gut die Adler beim Jagen sind und auch wie gut die Eichhörnchen beim überleben sind.

$$\frac{\Delta a}{a} = -k_a \,\Delta t$$

Sterben mit dieser Rate.

$$\Delta a \quad k \quad a\, \Delta t - k_a \Delta t$$

$$\frac{\Delta a}{a} = k_{ae}\, e\, \Delta t \quad \ldots$$

Desto mehr Begegnungen desto grösser ist das Wachsen der Adlerbevölkerung

$$\Delta a = (k_{ae}\, a e - k_a \cdot a)\, \Delta t$$

$$\frac{de}{dt} = k_e e - k_{ea}\, e a$$

$$\frac{da}{dt} = k_{ae}\, a e - k_a a$$

$k_e = 2$

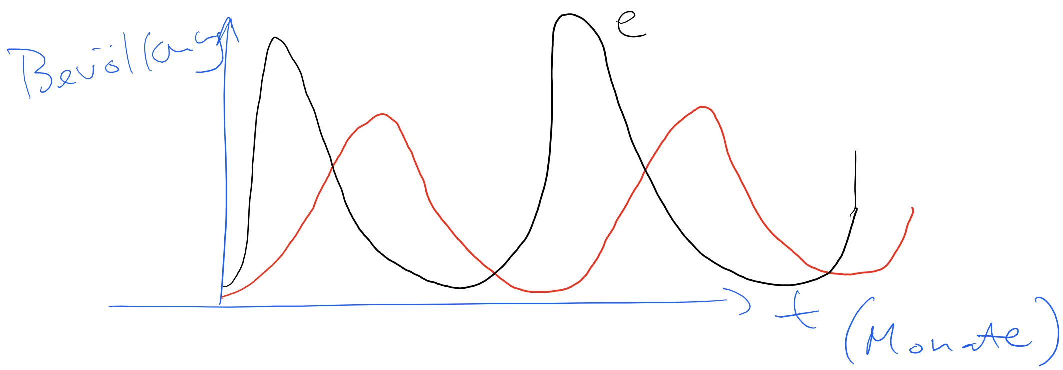
$k_{ea} = 0.02$

$k_{ae} = 0.01$

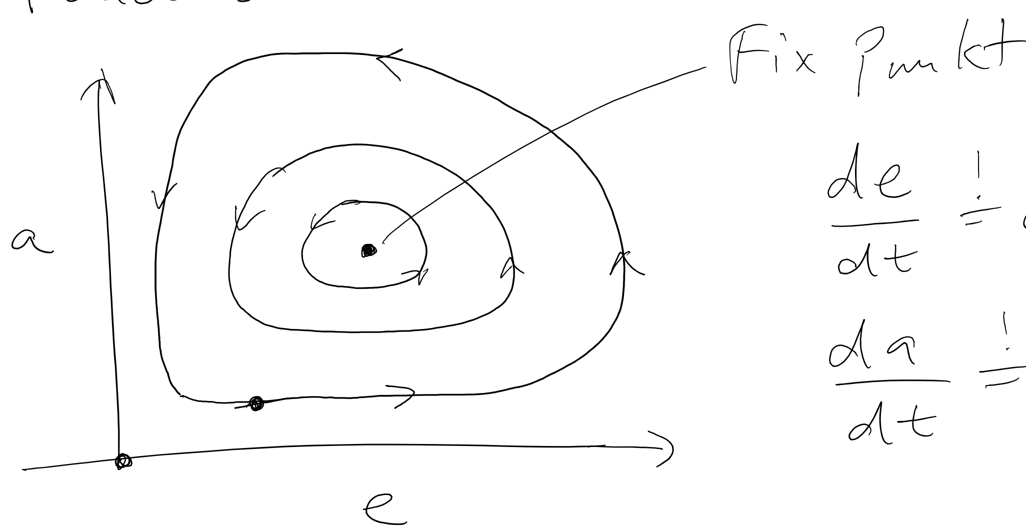
$k_a = 1.06$

$e(0) = 100$

$a(0) = 15$



Periodische



$$\frac{de}{dt} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{da}{dt} \overset{!}{=} 0$$