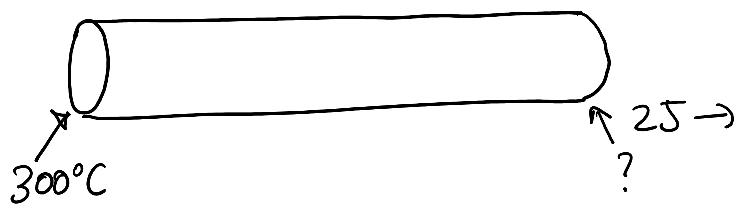
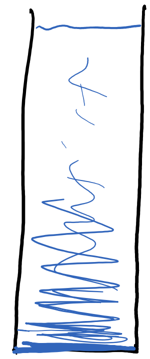
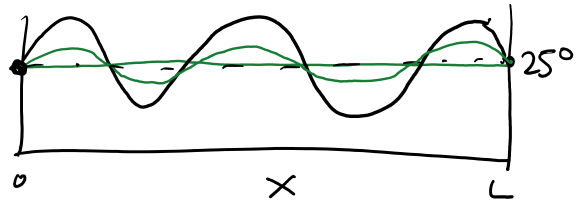
Diffusionsgleichung - Numerische Stabilität

06 May 2019 13:02

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u \qquad u(t, \underline{r})$$



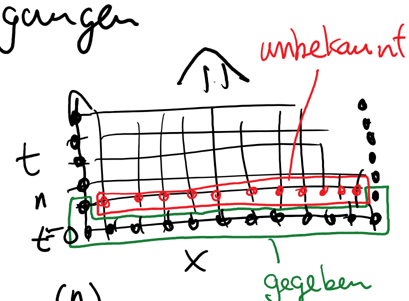




Sollte sich gleichmässig verteilen. Das ist eine Eigenschaft der Lösung.

$x \in [0, L] \quad t \geq 0$ Rand/Anfangsbedingungen

$$u(t=0, x) = u^{(0)}(x)$$
$$u(t, x=0) = u_1(t)$$
$$u(t, x=L) = u_2(t)$$



$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)}}{\Delta x^2}$$

Variante 1

$$u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)} \approx \underbrace{\frac{D \Delta t}{\Delta x^2}}_{\alpha} \left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)} \right)$$

$$u_j^{(n+1)} = \underbrace{u_j^{(n)} + \alpha \left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)} \right)}_{\text{ist alles bekannt}}$$

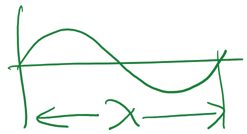
Explizite Methode

---

von Neumann Analyse $\qquad Ae^{i\theta} = A(\cos\theta + i\sin\theta)$

Ansatz $\rightarrow \quad u_j^{(n)} = A^n e^{ikj\Delta x}$

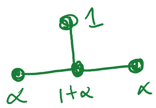
Ansatz $\rightarrow \quad u_j^{(n)} = A^n e^{ikj\Delta x}$



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$|A| < 1$: Stabil die Welle wird mit den Zeit gedämpft

$|A| > 1$: Instabil die Welle wächst exponentiel



$$u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)} = \alpha \left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)} \right)$$

$$(A-1)\cancel{A^n e^{ikj\Delta x}} = \alpha \left(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x} \right) \cancel{A^n e^{ikj\Delta x}}$$

$$A - 1 = 2\alpha\left(\cos(k\Delta x) - 1\right)$$

$$= -4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

$$A = 1 - 4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)$$

Wir wollen dass $|A| < 1$ für alle k!

$$\sin^2() \in [0, 1]$$

$$A \in 1 - 4\alpha[0, 1]$$

$$|A| < 1 \Rightarrow A^2 < 1$$

$$\Rightarrow A \in [-1, 1] \checkmark$$

$$A \in [1 - 4\alpha, 1]$$

$$-1 < 1 - 4\alpha$$

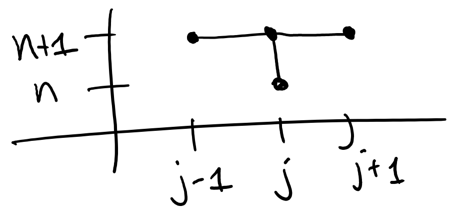
$$-2 < -4\alpha \qquad \boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$$

$$\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \quad !$$

$$\boxed{\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{[illegible]}}$$

$$\boxed{\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2D}}$$

Variante 2



$$u_j^{(n+1)} = u_j^{(n)} + \alpha \left(u_{j+1}^{(n+1)} - 2\, u_j^{(n+1)} + u_{j-1}^{(n+1)} \right)$$

Implizit !

$$A = \frac{1}{1 + 4\alpha \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right)}$$

$|A| \leq 1 \quad \forall k$ Immer Stabil

$$M \underline{x} = \underline{b}$$

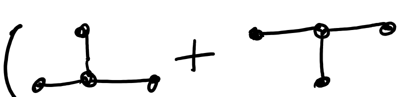
$$\begin{pmatrix} \ddots & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Fehler der Zwei Varianten $\mathcal{O}(\Delta x^2)$

$\mathcal{O}(\Delta t)$

Für Genauigkeit muss ich auch in Variante 2 kleine Zeitschitte wählen.

Variante 3: Crank-Nicholson

Mischt V1 & V2 : $\frac{1}{2}\Big($  $\Big)$

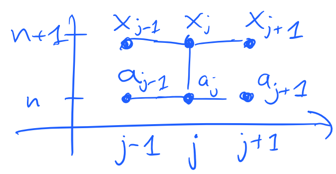
Impizit

$$u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)} = \frac{\alpha}{2}\left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)} + u_{j+1}^{(n+1)} - 2u_j^{(n+1)} + u_{j-1}^{(n+1)} \right)$$

$$u_j^{(n+1)} - u_j^{(n)} = \frac{\alpha}{2}\left(u_{j+1}^{(n)} - 2u_j^{(n)} + u_{j-1}^{(n)} + u_{j+1}^{(n+1)} - 2u_j^{(n+1)} + u_{j-1}^{(n+1)}\right)$$

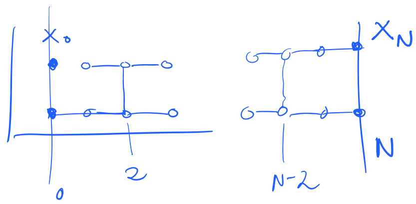
Das ist jetzt 2^{te}-Ordnung in Zeit.

$\underline{\underline{M}}\,\underline{x} = \underline{b}$ Lösen wo $\underline{\underline{M}}$ ein Tridiagonale Matrix!



$u_j^{n+1} \equiv x_j$

$u_j^{n} \equiv a_j$



x_0 und x_N sind auch noch gegeben!

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

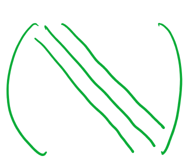
Die Gittergleichungen sind dann:

$j=2 \ldots N-2$ $\quad -\frac{\alpha}{2}x_{j-1} + (1+\alpha)x_j - \frac{\alpha}{2}x_{j+1} = \frac{\alpha}{2}a_{j-1} + (1-\alpha)a_j + \frac{\alpha}{2}a_{j+1}$

$j=1$ $\quad (1+\alpha)x_1 - \frac{\alpha}{2}x_2 = \frac{\alpha}{2}(x_0 + a_0 + a_2) + (1-\alpha)a_1$ $\quad b_1$: Gegebene Werte

$j=N-1$ $\quad -\frac{\alpha}{2}x_{N-2} + (1+\alpha)x_{N-1} = \frac{\alpha}{2}(a_{N-2} + a_N + x_N) + (1-\alpha)a_{N-1}$

$$\begin{pmatrix} (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \cdots & \emptyset \\ -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & \emptyset & & & \\ \emptyset & -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) & -\frac{\alpha}{2} & & & \\ & & & & & & \\ \emptyset & \emptyset & \cdots & & \emptyset & -\frac{\alpha}{2} & (1+\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \\ b_{N-1} \end{pmatrix}$$



Tridiagonal

Lösung in: $O(N)$

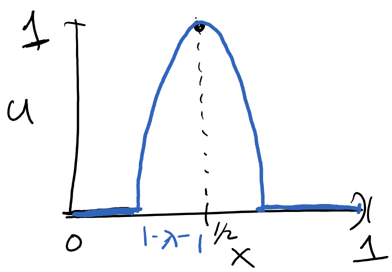
$2N$

Experimentelle Untersuchung der Stabilität

Setzen wir $D=1$ $\quad L = x_{max} = 1$

Rand: $u=0$ für $x=0,1$

Anfangsbedingung:



$$u^{(0)}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{\lambda^2}, & |x-\frac{1}{2}| \leq \lambda \\[2ex] 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$N=100$ Gitterpunkte $\quad \Delta x = \dfrac{1}{N}$

$$\Delta t \begin{cases} = 4.9 \times 10^{-5} \\ = 5.0 \times 10^{-5} \text{ ??} \\ = 5.1 \times 10^{-5} \end{cases}$$