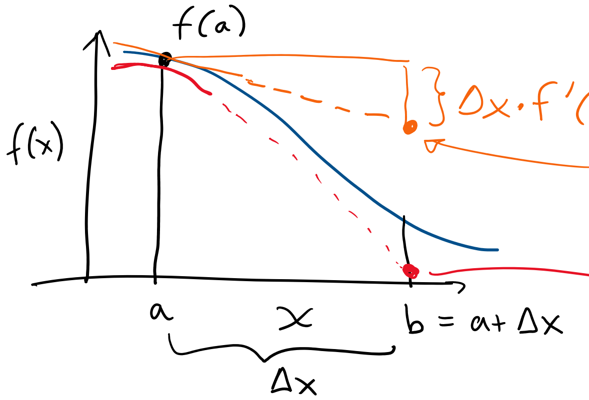
www.ics.uzh.ch/~stadel

Bisektionsverfahren : 1 binäre Stelle pro Schritt
$\Rightarrow$ k Stellen pro Schritt
Linear Konvergenz

Die Taylor Entwicklung



$\}\,\Delta x \cdot f'(a)$ $\qquad f'(a) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_a$

$f(a) + \Delta x f'(a) \approx f(b)$

$f(a) + \Delta x\, f'(a) + \frac{\Delta^2}{2} f''(a)$

$$f(b) \equiv f(a+\Delta x) \cong f(a) + \Delta x f'(a) + \tfrac{1}{2}\Delta x^2 f''(a)$$
$$+ \tfrac{1}{6}\Delta x^3 f^{(3)}(a) + \cdots + \tfrac{1}{n!}\Delta x^n f^{(n)}(a)$$
$$+ \mathcal{O}(\Delta x^{n+1})$$
$$+ \left[\frac{\Delta x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+t\Delta x)\,dt\right]$$

Ignorieren wir mal alle Terme von Ordnung 2 und höher

$$f(x) = f(a+\Delta x) \cong f(a) + \Delta x\, f'(a)$$

Nehmen wir an das unsere Funktion eine Nullstelle bei Punkt x hat

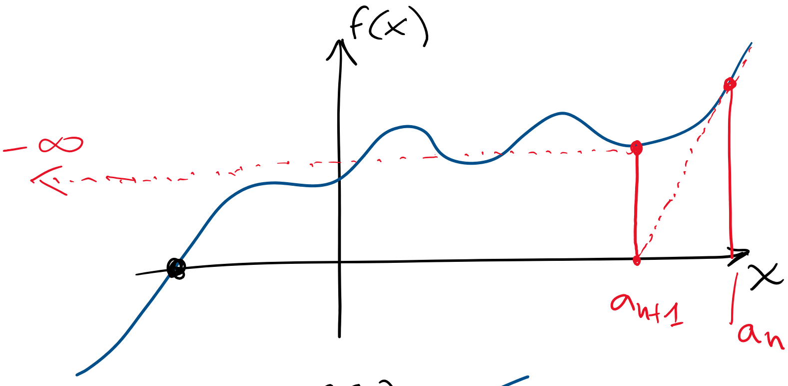
$$f(x) = 0 \qquad a + \Delta x \equiv x$$
$$0 \cong f(a) + \Delta x f'(a)$$
$$\Delta x \cong -\frac{f(a)}{f'(a)} \Rightarrow x \cong a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

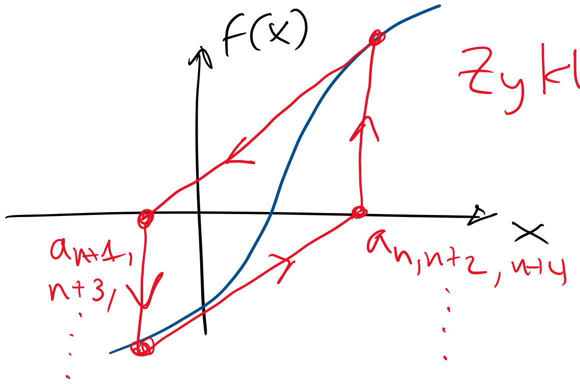
$\boxed{a = x}$

Newton Verfahren

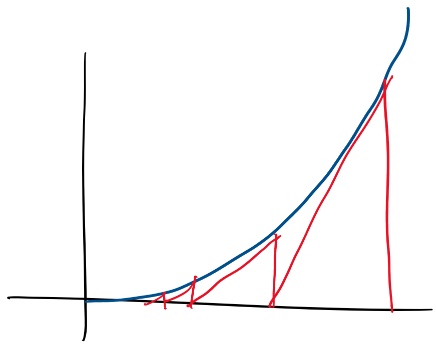
Jede Iteration verdoppelt die Anzahl der genauen Stellen. Quadratische

Jede Iteration verdoppelt die Anzahl der genauen Stellen. Quadratische Konvergenz





Zyklus!



Manchmal kann Konvergenz sicher gestellt werden.

Beispiel: $\sqrt{x}$ $\quad \sqrt{x} = x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Hier ist aber x ein gegebener Wert und wir wollen die Lösung für $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ wissen.

$$f(y) = y - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Nein! Trick $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $y^2 = \frac{1}{x}$

$$f(y) = x - \frac{1}{y^2}$$

$$\boxed{y \leftarrow y - \frac{x - 1/y^2}{2\,1/y^3}}$$

f'(y)

$$y \leftarrow y - \frac{1}{2} x y^3 + \frac{1}{2} y$$

$$y \leftarrow y\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} x y^2\right)$$

$$\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$y \leftarrow y\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} x y^{\alpha}\right) \qquad \frac{1}{y} \equiv x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{-}$$

Anfangswert der so nahe wie möglich zu $1/\sqrt{x}$ ist aber es muss auch billig sein!

$$x = +M \times 2^{e}$$

$$1 \leq M < 2 \qquad e = 2$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}}} \times 2^{-e/2}$$

0	0	0	0	0	0	1	0

$\longrightarrow$ Shift rechts

							1

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1$$

Mittelwert für y

$$y_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0{,}85355\,?$$

Beispiel: Kepler Gleichung

$$M = E - e \sin E$$

E – ein Winkel

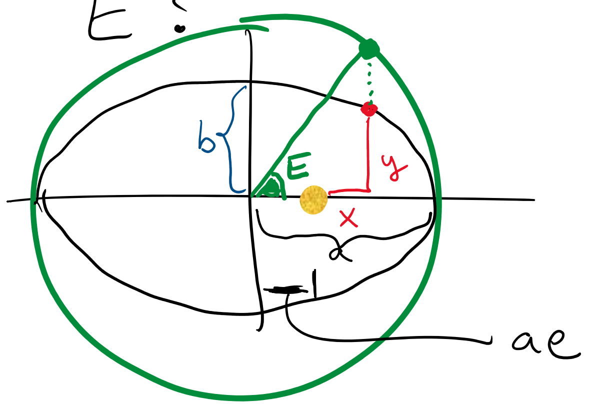
e – Eccentricität

M – Winkel gegeben!

$$M = nt \qquad n = \frac{2\pi}{T} \qquad T = a^{3/2}$$

T – Periode in Jahren; T – Jahren; a – A.U.

E?



$$x = a\cos(E) - ae$$

$$y = b \sin E = a\sqrt{1-e^2}\,\sin(E)$$

$$f(E) = E - e\sin E - M$$

$$f'(E) = 1 - e\cos E$$

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$

$$E_0 = M \ ?$$

<u>Aufgabe</u>: Planet in der Umlaufbahn zeichnen.